如何获得美国教授写的推荐信? 美国 Math League 决赛和夏令营给你机会!

绝大多数想申请美国、加拿大、英国、澳大利亚等英语国家的高中和大学的中国学生，**都苦于没有机会能够和美国大学的教授建立联系并获得教授写的推荐信。**美国大学教授给学生写推荐信，是需要这个教授和学生相处了一定的时间，对这个学生比较了解，然后才能给这个学生写推荐信。

但是这个事情不是毫无门路的，是可解的。**让我们来看一个真实的事例。**

2024 年 7 月美国 Math League 决赛和数学夏令营在美国新泽西州举办，有来自美国、加拿大、中国、日本、澳大利亚、泰国、印度、土耳其等国超过 200 多名 3-9 年级的优秀学生参加，同学们除了参加 Math League 的决赛之外，还在美国知名大学的知名教授指导下学习数学。其中有位来自美国知名大学的知名教授，我们暂且称之为 M 教授。这位 M 教授积极参与了 Math League 决赛试题的命题、授课内容的制定、以及亲自给学生授课。在决赛和数学夏令营结束之后这位 M 教授给所有参加美国 Math League 决赛和数学夏令营的学生出了 3 道题目，这位教授承诺如果有学生能够解答其中至少一道题目，**就可以帮这个学生在申请美国、加拿大、英国、澳大利亚等国家的高中及大学时写推荐信。这是什么样的 3 道题目呢? 让我们慢慢道来。**

毕达哥拉斯学派是公元前 6 到 5 世纪的一个古希腊哲学与数学流派，他们认为**数字是宇宙的基础**。他们相信:

- 宇宙中的一切都可以通过**整数和比例**来解释;
- 数字及其**比值**（如音乐中的音程、几何中的比例）揭示了宇宙的**秩序与和谐**。
- **所有的数字都是有理数**，也就是说，每一个数都可以表示为**两个整数的比值**（比如 3/4、5/2 等等）。

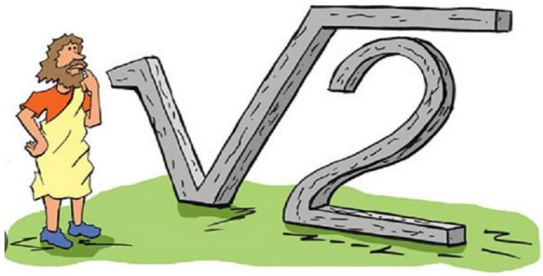
问题出现了：无理数的发现

这一信念在有人（可能是**希帕索斯 Hippasus**）发现 $\sqrt{2}$ （一个边长为 1 的正方形的对角线）**无法表示为两个整数的比值**之后，被彻底推翻。

- 这意味着 $\sqrt{2}$ 是一个**无理数 (irrational)**;
- 这直接与毕达哥拉斯学派关于“万物皆数”（这里的“数”指的是有理数）的核心信念相矛盾。

毕达哥拉斯学派的反应：

- 无理数的发现在哲学上对他们来说是**毁灭性的**;
- 根据传说，希帕索斯 (Hippasus) 因为揭示了这个矛盾，要么被**放逐**，要么被**杀害**（虽然这更可能是神话传说而非历史事实）。



如何证明$\sqrt{2}$是一个**无理数**呢? 这是数学史上一个非常经典且优雅的证明，被称为 **"反证法"** 证明（**proof by contradiction**）。我们一步步来看:

要证明:
$\sqrt{2}$ **是无理数**
也就是说，$\sqrt{2}$ **不能表示为两个整数之比（即一个分数）**

假设（用于反证法）:
我们假设相反的情况 ——
　$\sqrt{2}$ 是有理数
那么，**就存在两个互质整数** a 和 b（即 a 和 b 没有公因数），使得:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

两边平方:

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$
$$\Rightarrow a^2 = 2b^2$$

推论 1:
从上式可以看出:
　a^2是 2 的倍数$\Rightarrow a^2$是偶数
　那么 a 也必须是偶数（因为奇数的平方是奇数）

我们设 a = 2k（k 为整数）

代入回去：

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2$$
$$\Rightarrow 4k^2 = 2b^2$$

两边除以 2:

$$2k^2 = b^2$$

推论 2：

这说明:

b^2 是 2 的倍数 $\Rightarrow b^2$ 是偶数 $\Rightarrow$ b 也是偶数

矛盾来了：

我们刚才设定:

a 和 b 是互质的（没有共同因数）

但我们现在证明了:

a 是偶数

b 也是偶数

→ 所以 **a 和 b 至少有 2 这个公因数**!

这与我们的假设**矛盾**!

所以结论是：

我们的假设（$\sqrt{2}$ 是有理数）是错误的。

因此:

$\sqrt{2}$ 是**无理数**，不能表示为两个整数之比。

然后这位 M 教授给所有学生发了一篇他自己过去写的论文，“IRRATIONALITY FROM THE BOOK”, 这篇论文讲述了如何用**几何**来这证明 $\sqrt{2}$ 是一个**无理数 (irrational)。**下面我们来看看这个证明的简要叙述 (原文为英文，这里翻译成中文)。

我们现在来介绍 Tennenbaum **精妙的几何证明**，以说明 $\sqrt{2}$ 是无理数。

假设对于某些整数 a 和 b，满足:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$$

不失一般性，我们可以假设 a 和 b 是满足该关系的最小正整数对。到目前为止，这和标准的反证法证明看起来非常相似；但接下来我们将采取一个不同的思路。

再次观察这个等式：

$$a^2 = 2b^2$$

这一次，我们从**几何的角度**来解释它：

两个边长为 b 的正方形的面积（也就是 $2b^2$）等于一个边长为 a 的正方形的面积（即 a^2）。

考虑图 1，我们可以看到，两个边长为 b 的正方形（包括重叠的粉色区域被计算了两次）所覆盖的总面积，等于一个边长为 a 的大正方形的面积。因此，那个**被重复计算的粉色区域**（边长为 $2b-a$ 的正方形）的面积，正好等于两块**未被覆盖的白色小正方形**（每个边长为 $a-b$）的总面积。

换句话说，满足：

$$(2b-a)^2 = 2(a-b)^2$$

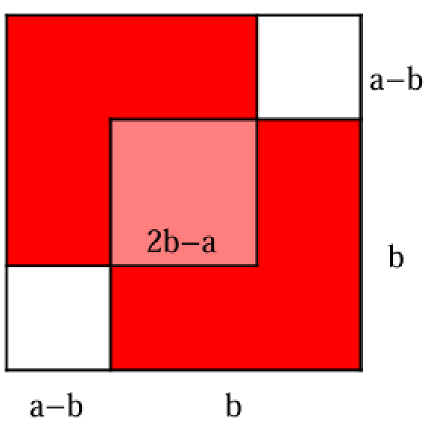
即：

$$\sqrt{2} = \frac{2b-a}{a-b}$$

但这意味着我们找到了一个比 $\frac{a}{b}$ **更小的解**，这与我们最初假设 a 和 b 是最小正整数对的前提**矛盾**。

注: 如何证明 $2b - a < a$? 这个不难，因为 $b < a$, $2b < 2a$, $2b - a < a$. 同样我们可以证明 $a - b < b$. (否则的话， $a \geq 2b$, $a/b \geq 2 > \sqrt{2}$).

这就完成了一个**几何意义下的反证法证明**，证明了 $\sqrt{2}$ 是无理数。



这篇论文还给出了 $\sqrt{6}$ 是无理数的几何证明，下图。(证明部分没有列出)。

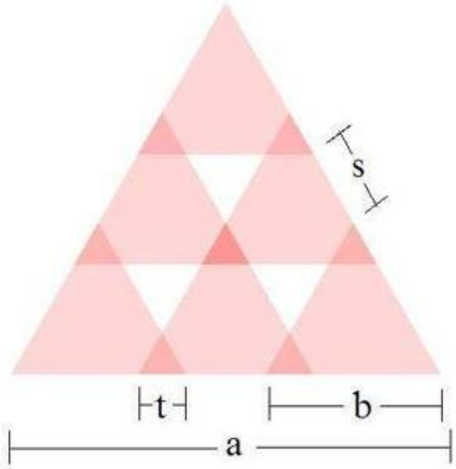


FIGURE 5. Geometric proof of the irrationality of $\sqrt{6}$.

现在我们可以看看 M 教授给学生出的这 3 道题目了。

1. **Using a method similar to the one in the paper, prove that $\sqrt{7}$ is irrational. (使用与论文中类似的方法，证明 $\sqrt{7}$ 是无理数。)**
2. **Using a similar method, prove that $\sqrt[3]{2}$ is irrational. (使用类似的方法，证明 $\sqrt[3]{2}$ 是无理数。)**
3. **The paper uses six triangles with a triple intersection to prove that $\sqrt{6}$ is irrational — can you instead use a similar method to the paper's proof of $\sqrt{5}$ being irrational, but with hexagons to prove $\sqrt{6}$ is irrational? (论文中使用六个三角形的三重交点来证明 $\sqrt{6}$ 是无理数 —— 你能否改用与论文中证明 $\sqrt{5}$ 是无理数的类似方法，但用六边形来证明 $\sqrt{6}$ 是无理数？)**

这 3 个问题很难吗? 可以说比较难，因为如果不难的话，一个美国知名大学的知名教授不可能因为一个学生解答了其中一个题目，就答应为这个学生写推荐信。这 3 道题目需要花较多的时间和投入才能够解决，期间需要和教授通过邮件反复交流和沟通。但是，有三名中国学生，他们经过自己的不懈努力以及和教授的反复交流，他们证明了第 3 道题目，获得了教授的认可，**教授答应可以随时给他们写推荐信(在他们需要的时候)**。而且，更令人兴奋的是，其中两位学生 (一个 5 年级，一个 9 年级) 在这个教授的指导下将他们的证明又提高了一个层次，**和这位教授一起在美国的一个著名数学杂志上发表了关于这个证明的论文**。要知道，在数学杂志上发表论文，这个绝大多数情况下只有博士生和他们的导师(教授)才有可能，但是两名中国学生 (一个 5 年级，一个 9 年级)在这个教授的指导下做到了，为他们高兴和骄傲!

所以这 3 道题目很难吗? 肯定不容易，否则这个教授不可能因为学生证明了其中一道题目就会给学生写推荐信。但是难者不会，会者不难。三名中国学生在这个教授的指导下证明其中一道题目，并且其中两名学生(一个 5 年级，一个 9 年级)在这个教授指导下在美国的一个著名数学杂志上发表了关于这个证明的论文。难者不会，会者不难。

其他爱好数学、愿意挑战自己的同学还有这样的机会吗? 当然有! 2025 年美国 Math League 决赛和数学夏令营(3-9 年级) 7 月份在美国举行, 如果你想参加这次美国 Math League 决赛和数学夏令营，并有机会获得教授写的推荐信，请联系我们。

联系方式

邮箱地址：INFO@LTHOUGHTS.COM

微信人工客服(扫码咨询)：

官网：www.mathleague.world